ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN ĐỨC THẮNG

ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ DÃN TRONG KHÔNG GIAN b-METRIC VÀ KHÔNG GIAN b-METRIC NÓN

Ngành: Toán giải tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: **PGS.TS. Phạm Hiến Bằng**

THÁI NGUYÊN - 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Các kết quả chính của luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn Thạc sĩ của các tác giả khác.

Tôi xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện Luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong Luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Nguyễn Đức Thắng

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2020

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Năm 1922, Banach đã chứng minh một định lý nổi tiếng về điểm bất động trong không gian metric, gọi là nguyên lý ánh xạ co Banach, từ đó đã thiết lập sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình toán tử $Tx = x$. Đã có nhiều mở rộng của nguyên lý ánh xạ co Banach về điểm bất động. Sự mở rộng được thiết lập cho nhiều loại ánh xạ khác nhau trên các không gian kiểu metric. Năm 2007, Huang và Zhang đã giới thiệu không gian metric nón và chứng minh định lí điểm bất động đối với ánh xạ co trong không gian đó. Năm 2012, Stanic, Cvetkovic, Simic và Dimitrijevic đã đạt được một số kết quả về điểm bất động chung dưới điều kiện co kiểu Ciric trên không gian metric nón, Tương tự, năm 1989, Bakhtin đã giới thiệu không gian $b-$metric, là sự mở rộng khác của không gian metric. Năm 1993, Czerwik đã mở rộng định lý điểm bất động Banach trong không gian $b-$metric. Không gian $b-$metric nón là sự mở rộng của cả không gian metric nón và không gian $b-$metric.

Việc nghiên cứu về ánh xạ giãn cũng là lĩnh vực nghiên cứu rất thú vị trong lý thuyết điểm bất động. Điều này đã được phát triển vào năm 1984 từ công trình của Wang, Li, Gao và Iseki bằng cách giới thiệu các khái niệm về ánh xạ dãn trong không gian metric đầy đủ. Daffer và Kaneko sử dụng hai tự ánh xạ trong không gian metric đầy đủ, để tổng quát kết quả của Wang và các cộng sự. Kể từ đó, các định lý điểm bất động và điểm bất động chung đã được nhiều tác giả chứng minh cho ánh xạ giãn trong các không gian khác nhau, chẳng hạn: không gian G-metric, không gian $d-$metric, không gian $b-$metric, không gian $b-$metric riêng, không gian metric nón, không gian $b-$metric nón, … Một số kết quả về không gian $b-$metric nón sử dụng ánh xạ kiểu giãn đã được thiết lập bởi Huang, Zhu và Xi-Wen vào năm 2012. Gần đây, năm 2016, P.K Verma đã thiết lập một số kết quả về điểm bất động chung đối với các ánh xạ giãn trong không gian $b-$metric nón.

Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi chọn đề tài: "*Điểm bất động chung đối với các ánh xạ giãn trong không gian $b-$metric và không gian $b-$metric nón*".

Ý nghĩa thời sự: Đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Mục đích của luận văn là nghiên cứu và trình bày một số kết quả về Điểm bất động chung đối với các ánh xạ giãn trong không gian $b-$metric và không gian $b-$metric nón.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích hàm.

4. Bố cục luận văn

Nội dung đề tài được viết dựa trên các tài liệu [8] và [9] gồm 37 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian $b-$metric và không gian $b-$metric nón.

Chương 2: Là nội dung chính của đề tài, trình bày một số kết quả về điểm bất động chung đối với các ánh xạ giãn trong không gian $b-$metric và không gian $b-$metric nón.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian $b-$metric

Định nghĩa 1.1.1. Cho E là một tập khác rỗng và $k \geq 1$ là số thực cho trước. Hàm số $\rho : E \times E \to [0,+\infty)$ được gọi là một $b-$metric nếu với mọi $u,v,w \in E$ các điều kiện sau được thỏa mãn:

$a)$ $\rho(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;

$b)$ $\rho(u,v) = \rho(v,u)$;

$c)$ $\rho(u,v) \leq k\left[\rho(u,w) + \rho(w,v)\right]$.

Bộ ba (E,ρ,k) được gọi là không gian $b-$metric với hệ số $k \geq 1$.

Ví dụ 1.1.2. Mỗi không gian metric là không gian $b-$metric với $k = 1$, nhưng ngược lại không đúng. Ví dụ lấy $E = \mathbb{R}$ và $\rho : E \times E \to [0,\infty)$ là ánh xạ xác định bởi

$$\rho(u,v) = |\, u - v \,|^2 \text{ với mọi } u,v \in E.$$

Khi đó (E,ρ,k) là không gian $b-$metric với hệ số $k = 2$. Nhưng (E,ρ) không phải là không gian metric.

Ví dụ 1.1.3. Cho $E = \{-1,0,1\}$ và $d : E \times E \to [0,\infty)$ là ánh xạ xác định bởi

$$\rho(u,v) = \rho(v,u) \text{ với mọi } u,v \in E,$$

$$\rho(u,u) = 0,\ u \in E,$$

$$\rho(-1,0) = 3,\ \rho(-1,1) = \rho(0,1) = 1.$$

Khi đó (E,ρ,k) là không gian $b-$metric với $k = \dfrac{3}{2}$, nhưng không là không gian metric vì bất đẳng thức tam giác không thỏa mãn. Thật vậy, ta có

$$\rho(-1,1) + \rho(1,0) = 1 + 1 = 2 < 3 = \rho(-1,0).$$

Định nghĩa 1.1.4. Cho (E,ρ) là không gian $b-$metric, $u\in E$ và $\{u_n\}$ là một dãy trong E. Khi đó

(i) $\{u_n\}$ hội tụ đến u khi và chỉ khi $\lim_{n\to\infty}\rho(u_n,u)=0$.

Kí hiệu $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ hoặc $u_n\to u$ khi $n\to\infty$.

(ii) $\{u_n\}$ là dãy Cauchy khi và chỉ khi $\lim_{n,m\to\infty}\rho(u_n,u_m)=0$.

(iii) (E,ρ) là đầy đủ khi và chỉ khi mọi dãy Cauchy trong E đều hội tụ.

Định nghĩa 1.1.5.Cho (E,ρ) là không gian $b-$metric và ánh xạ $T:E\to E$. Ta nói rằng T liên tục tại $u_0\in E$ nếu với mọi dãy $\{u_n\}$ trong E, $u_n\to u_0$ khi $n\to\infty$ thì $Tu_n\to Tu_0$ khi $n\to\infty$. Nếu T liên tục tại mỗi điểm $u_0\in E$ thì ta nói T liên tục trên E.

Mệnh đề 1.1.6. *Cho (E,ρ,k) là không gian $b-$ metric, giả sử $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là các dãy hội tụ đến $u,v\in E$ tương ứng. Khi đó*

$$\frac{1}{k^2}\rho(u,v)\le\liminf_{n\to\infty}\rho(u_n,v_n)\le\limsup_{n\to\infty}\rho(u_n,v_n)\le k^2\rho(u,v).$$

Đặc biệt, nếu $u=v$ thì $\lim_{n\to\infty}\rho(u_n,v_n)=0$. Ngoài ra, với mỗi $w\in E$, ta có

$$\frac{1}{k}\rho(u,w)\le\liminf_{n\to\infty}\rho(u_n,w)\le\limsup_{n\to\infty}\rho(u_n,w)\le k\rho(u,w)\ .$$

Bổ đề 1.1.7. *Cho (E,ρ,k) là không gian $b-$metric với hệ số k và $\{u_n\}$ là dãy trong E sao cho $u_n\to u$ và $u_n\to v$. Khi đó $u=v$.*

Chứng minh. Giả sử $\rho(u,v)=\varepsilon>0$. Khi đó theo giả thiết $u_n\to u$ và $u_n\to v$ nên $\exists n_0$ sao cho với mọi $n\ge n_0$ thì $\rho(u_n,u)<\dfrac{\varepsilon}{2k}$ và $\rho(u_n,v)<\dfrac{\varepsilon}{2k}$. Suy ra

$$0\le\rho(u,v)\le k(\rho(u,u_n)+\rho(u_n,v))<k\left(\frac{\varepsilon}{2k}+\frac{\varepsilon}{2k}\right)=\varepsilon$$

với mọi $n \geq n_0$. Điều này mâu thuẫn với $\rho(u,v) = \varepsilon > 0$.

Bổ đề 1.1.8. *Cho* (E,ρ,k) *là không gian* $b-$*metric với hệ số* k *và* $\{u_k\}_{k=0}^{n} \subset E$. *Khi đó*

$$\rho(u_n,u_0) \leq k\rho(u_0,u_1) + \ldots + k^{n-1}\rho(u_{n-2},u_{n-1}) + k^{n-1}\rho(u_{n-1},u_n).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\rho(u_n,u_0) &\leq k[\rho(u_0,u_1) + \rho(u_1,u_2)] = k\rho(u_0,u_1) + k\rho(u_1,u_n) \\
&\leq k\rho(u_0,u_1) + k^2[\rho(u_1,u_2) + \rho(u_2,u_n)] \\
&= k\rho(u_0,u_1) + k^2\rho(u_1,u_2) + k^2\rho(u_2,u_n) \\
&\ldots \\
&\leq k\rho(u_0,u_1) + \ldots + k^{n-1}\rho(u_{n-2},u_{n-1}) + k^{n-1}\rho(u_{n-1},u_n).
\end{aligned}$$

Bổ đề 1.1.9. *Cho* $\{u_n\}$ *là dãy trong không gian* $b-$*metric* (E,ρ,k) *với hệ số* $k \geq 1$ *sao cho*

$$\rho(u_n,u_{n+1}) \leq \lambda\rho(u_{n-1},u_n)$$

với $n \in \mathbb{N}$ *và* $0 < \lambda < 1/k$. *Khi đó* $\{u_n\}$ *là dãy Cauchy trong* (E,ρ,k).

Chứng minh. Cho $m,n \in \mathbb{N}$ và $m < n$. Áp dụng bất đẳng thức kiểu tam giác vào bộ ba $\{u_m,u_{m+1},u_n\},\{u_{m+1},u_{m+2},u_n\},\ldots,\{u_{n-2},u_{n-1},u_n\}$ ta có

$$\begin{aligned}
\rho(u_m,u_n) &\leq k(\rho(u_m,u_{m+1}) + \rho(u_{m+1},u_n)) \\
&\leq k\rho(u_m,u_{m+1}) + k^2(\rho(_{m+1},u_{m+2}) + \rho(u_{m+2},u_n)) \\
&\leq \ldots \leq k\rho(u_m,u_{m+1}) + k^2\rho(u_{m+1},u_{m+2}) + \ldots \\
&+k^{n-m-1}(\rho(u_{n-2},u_{n-1}) + \rho(u_{n-1},u_n)) \\
&\leq k\rho(u_m,u_{m+1}) + k^2\rho(u_{m+1},u_{m+2}) + \ldots \\
&+k^{n-m-1}\rho(u_{n-2},u_{n-1}) + k^{n-m}\rho(u_{n-1},u_n).
\end{aligned}$$

Bây giờ từ $\rho(u_n,u_{n+1}) \leq \lambda\rho(u_{n-1},u_n)$ và $k\lambda < 1$ suy ra

$$\begin{aligned}\rho(u_m,u_n) &\le (k\lambda^m + k^2\lambda^{m+1} + ... + k^{n-m}\lambda^{n-1})\rho(u_0,u_1)\\ &= k\lambda^m(1+(k\lambda)+...+(k\lambda)^{n-m-1})\rho(u_0,u_1)\\ &\le \frac{k\lambda^m}{1-k\lambda}\rho(u_0,u_1) \to 0 \text{ khi } m\to\infty.\end{aligned}$$

Vậy $\{u_n\}$ là dãy Cauchy. □

Năm 2016, Daheriya, Likhitker và Ughade ([2]) đã chứng minh định lý sau đây về điểm bất động đối với một ánh xạ với điều kiện kiểu giãn cho không gian $b-$metric:

Định lý 1.1.10 ([2]) *Cho (E,ρ,k) là một không gian $b-$metric đầy đủ với hệ số $k\ge 1$ và T là ánh xạ liên tục thỏa mãn điều kiện*:

$$\rho\left(Tu,Tv\right) \ge \frac{\alpha\rho(u,Tu)\left[1+\rho(v,Tv)\right]}{1+\rho(u,v)} + \beta\rho(u,v),$$

với mọi $u,v\in E$, $u\ne v$; trong đó $\alpha,\beta\ge 0$ là các hằng số thực với $k\alpha+\beta>k$ và $\beta>1$. Khi đó T có một điểm bất động trong E.

Kết quả sau đây đã được chứng minh bởi Mohanta (Th.3.3 [5]) đối với ánh xạ liên tục trong không gian $b-$metric:

Định lý 1.1.11. [5] *Cho (E,ρ,k) là không gian $b-$metric với hệ số $k\ge 1$ và $T:E\to E$ là ánh xạ liên tục thỏa mãn điều kiện sau*:

$$\rho(Tu,Tv)+\alpha.max\left\{\rho(u,Tv),\rho(v,Tu)\right\} \ge \frac{\beta.\rho(u,Tv)\left[1+\rho(v,Tv)\right]}{1+\rho(u,v)} + \gamma\rho(u,v)$$

với $\forall u,v\in E$, $u\ne v$, trong đó $\alpha,\beta,\gamma\ge 0$, $k\beta+\gamma>(1+\alpha)k+k^2\alpha$,

$\gamma>1+\alpha$. Khi đó T có một điểm bất động trong E.

Định nghĩa 1.1.12. Cho S và T là các ánh xạ từ không gian metric (E,ρ) vào chính nó. Cặp ánh xạ (S,T) được gọi là tương thích nếu

$\lim_{n\to\infty}\rho(STu_n,TSu_n)=0$, với mọi dãy $\{u_n\}\subset E$ sao cho